Soluciones Axiomáticas en Juegos Cooperativos

Francisco Sánchez Sánchez

XXXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

CIMAT

1. La técnica

- G espacio de problemas
- S espacio de soluciones
- $\varphi : G \to S$

A cada problema le queda asignada una solución

$$v \in G \longmapsto \varphi(v).$$

Se pide que φ satisfaga ciertos axiomas

Axioma 1

Axioma 2

Axioma m

CIMAT

Teorema 1. *Existe una única*

$$\varphi : G \to S$$

que satisface los axiomas anteriores. Además,

$$\varphi(v) = \ldots$$

2. Juegos Cooperativos

$N = \{1, \ldots, n\}$

Definición 1. *Un juego es una pareja (N, v), donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es un conjunto finito y*

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

$v(S)$ ganancia conjunta que obtiene la coalición S si esta se forma.
Problema:

$$v \longmapsto x \in \mathbb{R}^N$$

2.1. Ejemplos de juegos.

- Juegos de redes: sistema de riego, drenaje, sistema de agua potable, teléfono, cablevisión.
- Finanzas
  - Inversiones con rendimientos crecientes
  - Seguros
- Bancarrota
  - Racionamiento
  - Impuestos
  - Servicios
- Otros
  - Aeropuerto
  - Elevador
  - Profesor visitante

Definición 2. *Una solución es una función,*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

Definición 3. El valor de Shapley *es la función* $Sh : G^N \to \mathbb{R}^N$ *definida por:*

$$Sh_i(N,v) = \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}(v(T \cup \{i\}) - v(T))$$

2.2. Axiomas.

Definición 4 (Eficiencia). *Diremos que la solución* φ *es eficiente si y sólo si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

para todo $v \in G$.

Definición 5 (Simetría). *Diremos que la solución* φ *es simétrica si y sólo si*

$$\theta * \varphi(v) = \varphi(\theta * v)$$

para todo $\theta \in \Theta, v \in G$.

Definición 6. *Diremos que el jugador i es jugador nulo en v si*

$$v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

para todo $S \subseteq N$.

Definición 7 (Nulidad)**.** *Diremos que la solución φ satisface nulidad si $\varphi_i(v) = 0$ para todo jugador nulo en v.*

Teorema 2 (Shapley,1953)**.** *Una solución satisface los axiomas de eficiente, simetría, aditividad y nulidad si y sólo si es el valor de Shapley.*

3. El Valor de Shapley bajo otros axiomas

Sea:

$$\nu^i(S) = \begin{cases} \nu(S) - \nu(S \backslash \{i\}) & \text{si } i \in S \\ \nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

la contribución marginal de i a S.

Axioma de monotonía fuerte.

Se dirá que φ es fuertemente monótona si y sólo si cada vez que se tengan juegos $\nu, w \in G$ tales que $\nu^i(S) \geq w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$ entonces $\varphi_i(\nu) \geq \varphi_i(w)$.

Teorema 3. *(Young). El Valor de Shapley es la única solución fuertemente monótona que satisface simetría y eficencia.*

CIMAT

4. Valor de Banzhaf-Coleman

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un juego ν_T amalgamando los jugadores de T en uno solo; a este jugador se le llamará T'. El espacio de jugadores para ν_T es $N \backslash T \cup \{T'\}$, y se define por:

$$\nu_T(S) = \nu(S)$$
$$\nu_T(S \cup \{T'\}) = \nu(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$.

Axioma de reducción. $\phi_i(\nu) + \phi_j(\nu) \leq \phi_{T'}(\nu_T)$ para cualquier coalición $T = \{i, j\}$ de dos jugadores.

Teorema 4. *(Lehrer). ϕ satisface los axiomas de nulidad, simetría, linealidad y reducción si y sólo si ϕ es el Valor de Banzhaf–Coleman en G.*

CIMAT

5. Valor de Shapley ponderado

Definición 8. *Se dirá que S es una coalición natural de socios en el juego ν, si para cada $T \subset S$ $(T \neq S)$ y $R \subseteq N \backslash S$, $\nu(R \cup T) = \nu(R)$.*

Axioma de sociedad. Si S es una coalición natural de socios en ν entonces $\psi_i(\nu) = \psi_i(\psi\nu(S)u_S)$ para todo i ∈S.

Teorema 5. *ψ es una solución lineal que satisface los axiomas de sociedad, nulidad y $\psi(u_N) > 0$ si y sólo si existe w tal que ψ es el Valor de Shapley ponderado con sistema de ponderación simple w.*

CIMAT

6. Juegos y gráficas

$$g^N = \{\{i,j\} \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$$

$$GR = \{g \mid g \subseteq g^N\}$$

Definición 9. *A la función $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ se le llama regla de asignación si y sólo si para toda $g \in GR$ y $S \in N/g$ se tiene que:*

$$\sum_{i \in S} \psi_i(g) = \nu(S)$$

Definición 10. *La regla de asignación* ψ *es estable si y sólo si para toda* $g \in GR$ *y* $\{i,j\} \in g$ *se tiene que:*

$$\psi_i(g) \geq \psi_i(g \backslash \{i,j\})$$
$$\psi_j(g) \geq \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

Definición 11. *La regla de asignación* ψ *es justa si y sólo si para toda* $g \in GR$ *y* $\{i,j\} \in g$ *se tiene que:*

$$\psi_i(g) - \psi_i(g \backslash \{i,j\}) = \psi_j(g) - \psi_j(g \backslash \{i,j\}).$$

Definición 12. *Para cada pareja* $(\nu, g) \in G \times GR$ *sea* $\nu/g \in G$ *definido por:*

$$(\nu/g)(S) = \sum_{T \in S/g} \nu(T).$$

Teorema 6. *(Myerson). Dado un juego* ν *existe una única regla de asignación justa* $\psi : GR \to \mathbf{R}^n$ *la cual esta dada por:*

$$\psi(g) = Sh(\nu/g) \text{ para todo } g \in GR$$

donde Sh *es el Valor de Shapley. Además si* ν *es superaditivo la regla de asignación es estable.*

CIMAT

7. La distribución de herencias

7.1. Notación.

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$M = \{1, \dots, n\}$$

$$A$$

$$u \in R^N$$

$$v \in R^N,\ v_j = \sum_{i \in M} a_{ij}$$

CIMAT

7.2. Por porcentajes de herencia. Problema: A

$$\begin{gathered}\text{Asignación}\\ +\\ \text{Compensación económica}\end{gathered}$$

Solución: (u, x)

$$\varphi(u, v) \;\text{ compensaciones}$$

A1 $\iota'\varphi(u, v) = 0$.
A2 $(u_i + \varphi_i(u, v))v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))v_i$.
A3 (u, x) es OP si y sólo si no existe otra solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que

$$\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$$

y la desigualdad estricta para al menos una coordenada.

Teorema 7. (u, x) *OP* $\Longleftrightarrow$ *u con mejores postores.*

CIMAT

φ *satisface A1 y A2* $\Longleftrightarrow \varphi(u,v) = \frac{\iota' u}{\iota' v} v - u.$

Ejemplo.

Bien 1	25	20	50
Bien 2	75	180	200
v	100	200	250
u	0	0	250
Efectivo	45.45	90.90	-136.36
Porcentaje	45.45 %	45.45 %	45.45 %

$$\varphi(u,v) = \frac{\iota' u}{\iota' v} v - u$$

$$= \frac{250}{550}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45{,}45 \\ 90{,}90 \\ -136{,}36 \end{pmatrix}$$

el resultado es excelente, el jugador 1 obtiene \$45.45 cuando el sólo espera \$33.33, el jugador 2 obtiene \$90.90 cuando espera \$66.66 y el jugador 3 después de pagar obtiene un beneficio de \$113.64 cuando de acuerdo a sus estimaciones le corresponden sólo \$83.33. Además, cada jugador obtiene la misma proporción de lo que él cree que vale la herencia.

Teorema 8. *Si u con mejores postores entonces el pago total $u + \varphi(u, v)$*

a) *es justo*
b) *Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u + \varphi(u, v) = \lambda v$.*
c) *es una función continua de las a_{ij}.*

Con α :

A4 $(u_i + \varphi_i(u, v))\alpha_j v_j = (u_j + \varphi_j(u, v))\alpha_i v_i$ para todo $i, j \in N$.

CIMAT

Teorema 9. (u,x) *OP* $\iff$ *u con mejores postores.*
φ *satisface A1 y A4* $\iff \varphi(u,v) = \frac{\iota' u}{\alpha' v}\widehat{\alpha} v - u.$

Ejemplo (continuación).

v	100	200	250
u	0	0	250
α	0.2	0.7	0.1
Corresponde	20	140	25
Efectivo	27.03	189.19	-216.22
Porcentaje	27.03 %	94.59 %	13.51 %

7.3. Que se rife.

determinar los derechos de pertenencia
+
la negociación en la asignación

Sea $a \in \mathbb{R}^N$.

$$v^k(S) = \begin{cases} \max_{l \in S} a_l & \text{si } k \in S \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$\text{Solución } \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_k Sh(v^k)$$

Por la linealidad de Sh,

$$\frac{1}{n}\sum_k Sh(v^k) = Sh(\frac{1}{n}\sum_k v^k) = \sum_{\{S|S\subseteq N\}} p(n,s)\frac{s}{n}\max_{l\in S} a_l$$

donde $p(n,s) = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} & \text{si } i \in S \\ -\frac{s!(n-s-1)!}{n!} & \text{de otra forma} \end{cases}$.

Ejemplo (continuación).

v	100	200	250
Asignación	63.8	80.5	105.5
Porcentaje	63.8 %	40.25 %	42.2 %

Con α_i:

$$Sh_i(w) = \sum_{\{S|S\subseteq N\}} p(n,s)\alpha(S) \max_{l\in S} a_l$$

donde $\alpha(S) = \sum_{i\in S} \alpha_i$.

Sólo negocie con el que evalué más alto:

$\frac{1}{n}(\frac{a_{\text{máx}}-a_k}{2} + a_k)$	si k no es el que más alto evalúa
$\frac{1}{n}(\sum_k \frac{a_{\text{máx}}-a_k}{2} + a_{\text{máx}})$	de otra forma.

v	100	200	250
Asignación	58.3	75.0	116.6
Porcentaje	58.3 %	37.5 %	46.64 %

CIMAT

8. Distribución de costos en el caso continuo

Definición 13. *El juego es una pareja* (f, z) *donde*

- $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$
- $z \in \mathbb{R}^n_+$.

Definición 14. *Una solución es una función* $\varphi : F \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $z \cdot \varphi(f, z) = f(z)$.

Definición 15. *Un potencial es una función diferencial*

$$F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$$

tal que $z \cdot \nabla F(z) = f(z)$ *para toda* $z \in \mathbb{R}^n_+$.

8.1. Qué se obtiene:

Dado f

a) Existe un único potencial F.

b) Hay un único campo vectorial integrable ψ_f sobre $\mathbb{R}^n_+$ tal que $z \cdot \psi_f(z) = f(z)$.

c) $F(z) = \int_0^1 \frac{1}{t} f(tz)dt$